第 2 講　命題と証明

PART1　命題と条件

1　次の $\boxed{}$ に最も適するものを下の選択肢①～④から 1 つ選べ。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための $\boxed{}$。

(4)　$-2 \leqq x \leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための $\boxed{}$。

(5)　$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための $\boxed{}$。

①　必要十分条件である

②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

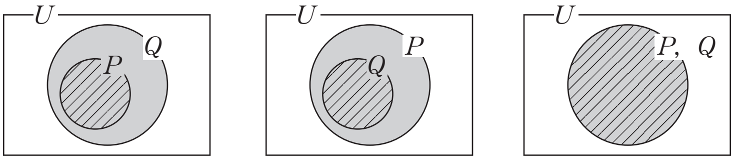
Point Pickup

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする。

$p \Longrightarrow q$ が真，すなわち $P \subset Q$ ならば，p は q であるための十分条件

$q \Longrightarrow p$ が真，すなわち $Q \subset P$ ならば，p は q であるための必要条件

$p \Longleftrightarrow q$ が真，すなわち $P=Q$ ならば，p は q であるための必要十分条件



p は十分条件　　p は必要条件　　p は必要十分条件

第２講　PART1　確認問題

1　x，y，c は実数とする。

$x<y$ は $cx<cy$ であるための ア 。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

2　a は実数とする。

$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための イ 。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

3　a，b は実数とする。

$ab+1=a+b$ は，a，b のうち少なくとも１つは１であるための ウ 。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

4 x は実数とする。

$|x-4|>2$ は，$|x+1|<3$ であるための [エ]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

5 x，y は実数とする。

x，y がともに整数であることは，$x+y$，xy がともに整数であるための [オ]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

【MEMO】

第 2 講　命題と証明

PART1　命題と条件

1　次の [　　] に最も適するものを下の選択肢①～④から 1 つ選べ。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための [　　]。

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための [　　]。

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための [　　]。

(4)　$-2 \leqq x \leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための [　　]。

(5)　$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための [　　]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x<2 \Longrightarrow x \leqq 2$ は明らかに真

$x \leqq 2 \Longrightarrow x<2$ は偽(反例：$x=2$)

したがって，$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための十分条件であるが必要条件でない。(③)

(2)　$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$ は偽(反例：$a=-2$，$b=1$)

$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$ は偽(反例：$a=1$，$b=-2$)

したがって，$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための必要条件でも十分条件でもない。(④)

(3)　a が実数のとき，$a^2 \geqq 0$(等号成立は $a=0$ のとき)であるから，

$a^2+b^2=0$ となるのは $a=b=0$ のときのみである。

よって　$a=b=0 \Longleftrightarrow a^2+b^2=0$

したがって，$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための必要十分条件である。(①)

(4)　$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ のとき $-\dfrac{3}{2}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$　　つまり $-2<x<1$

$-2\leqq x\leqq 2\Longrightarrow\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ は偽(反例：$x=-2$)

$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}\Longrightarrow -2\leqq x\leqq 2$ は真

したがって，$-2\leqq x\leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(②)

(5)　$x+y$，xy がともに有理数 $\Longrightarrow$ x，y がともに有理数は偽(反例：$x=3-\sqrt{2}$，$y=3+\sqrt{2}$)

x，y がともに有理数 $\Longrightarrow$ $x+y$，xy がともに有理数は明らかに真

したがって，$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための必要条件であるが十分条件ではない。(②)

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$x<y \Longrightarrow cx<cy$ は偽

（反例：$x=1,\ y=2,\ c=-1$）

$cx<cy \Longrightarrow x<y$ は偽

（反例：$x=-1,\ y=-2,\ c=-1$）

よって，$x<y$ は $cx<cy$ であるための**必要条件でも十分条件でもない。** [A]

[A]
$p \Longrightarrow q$ が真であるとき
　p は q であるための十分条件。
$q \Longrightarrow p$ が真であるとき
　p は q であるための必要条件。
$p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに真，すなわち，$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき
　p は q であるための必要十分条件。
$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽であるとき
　p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

2

[正解] イ：③

[解説]

$a>0 \Longrightarrow \sqrt{a^2}=a$ は，明らかに真

$\sqrt{a^2}=a \Longrightarrow a>0$ は偽（反例：$a=0$）

よって，$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [A]

3

[正解] ウ：①

[解説]

$ab+1=a+b$ より　$ab+1-a-b=0$

$a(b-1)-(b-1)=0$　　$(a-1)(b-1)=0$

よって　$a=1$ または $b=1$

これは，a，b のうち少なくとも１つは１であることと同値である。 [B]

[B]　$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，p と q は互いに同値であるという。

すなわち，次が成り立つ。

$ab+1=a+b$

$\Longleftrightarrow a$，b のうち少なくとも１つは１である

よって，$ab+1=a+b$ は，a，b のうち少なくとも１つは１であるための**必要十分条件である。** [A]

4 [正解] エ：②

[解説]

$|x-4|>2$ のとき　$x-4<-2,\ 2<x-4$

つまり　$x<2,\ 6<x$

$|x+1|<3$ のとき　$-3<x+1<3$

つまり　$-4<x<2$

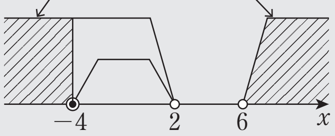
$|x-4|>2 \Longrightarrow |x+1|<3$ は偽(反例：$x=7$) [C]

$|x+1|<3 \Longrightarrow |x-4|>2$ は真

よって，$|x-4|>2$ は，$|x+1|<3$ であるための**必要条件であるが十分条件ではない。** [A]

[C]

$|x-4|>2 \Longrightarrow |x+1|<3$ の反例となる部分



5 [正解] オ：③

[解説]

$x,\ y$ がともに整数 $\Longrightarrow x+y,\ xy$ がともに整数

は，明らかに真

$x+y,\ xy$ がともに整数 $\Longrightarrow x,\ y$ がともに整数

は偽(反例：$x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$)

よって，$x,\ y$ がともに整数であることは，$x+y,\ xy$ がともに整数であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [A]